Тәжірибелік сабақ 7
Жылу өткізгіштік теңдеудің жалпы шешімі

$U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}=0$ теңдеудің шешімін табу керек.

1.Берілген теңдеуді канондық түрге келтіреміз. Ол үшін оның типін анықтап, сипаттамаларын табамыз. $\delta(x,y)=a_{12}^2(x,y)-a_{11}(x,y)a_{22}(x,y)=1-1=0$. Демек, берілген теңдеу параболалық теңдеу. Олай болса, оның бір ғана нақты сипаттамасы болады. Оны табу үшін берілген теңдеудің сипаттамалық теңдеуін құрайық:

$$(dy)^2-2dxdy+(dx)^2=0\Rightarrow(dy-dx)^2=0\Rightarrow dy-dx=0\Rightarrow y-x=c$$

2. $\xi=y-x,\eta=y$ жаңа айнымалыларын енгізіп, ізделінді функцияның дербес туындыларын осы айнымалылар арқылы өрнектейміз.

$$U_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \xi}{\partial x}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\cdot\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2};$$

$$U_{xy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)=-\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta};$$

$$U_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)=\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \mu}\right)=$$

$$=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}.$$

3.Табылған туындыларды берілген теңдеуге апарып қойып, оның канондық түрін аламыз:

$$\begin{aligned}&U_{xx}+2U_{xy}+U_{yy}=\frac{\partial^2 U}{\partial \xi}-2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}-2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2}+2\frac{\partial^2 U}{\partial \xi\partial \eta}+\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=\\&=\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}\Rightarrow\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2}=0\Rightarrow U_\eta=\varphi(\xi)\Rightarrow U=\eta\varphi(\xi)+\psi(\xi).\end{aligned}\tag{1}$$

Мұндағы $\varphi(\xi)$ мен $\psi(\xi)$ - кез келген функциялар.

4.Берілген теңдеудің шешімін табу. Ол үшін (1) теңдігіндегі ξ,η айнымаларын x,y айнымалары арқылы ауыстырамыз:

$$U=y\varphi(y-x)+\psi(y-x),$$

мұндағы φ мен ψ - кез келген функциялар, бірақ олардың екінші ретті үзіліссіз туындылары бар болу керек.